

论回旋电子与涡旋电磁波量子：涡旋电子波包

王哲远, 张超*

(清华大学航天航空学院航空宇航电子系统实验室, 北京 100084)

摘要: 回旋电子辐射涡旋电磁波量子的理论模型是量子态涡旋电磁波技术的关键。本文是“论回旋电子与涡旋电磁波量子”系列论文的第一部分, 建立了“涡旋电子波包”相关理论模型。能级跃迁辐射是涡旋电子最自然的辐射之一。为了给出单个涡旋电子回旋辐射产生涡旋电磁波量子机理, 本文根据磁场中电子的守恒量推导了恒定磁场中涡旋电子波函数, 对相对论电子波包的运动情况做出分析, 并通过求解狄拉克方程解释了自旋角动量和轨道角动量在本质上不可分割的情况。另外, 在求解过程中根据相对论能量本征方程得到回旋电子在磁场中的横向能级分布, 即朗道能级, 并仿真得到电子具有确切轨道角动量数时的朗道能级形状。

关键词: 能级跃迁辐射; 涡旋电子; 涡旋电磁波量子; 轨道角动量; 朗道能级; 相对论效应; 正则动量

基金项目: 国家自然科学基金(No.61731011)

中图分类号: TN91; O562

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2024)02-0414-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20220755

The Vortex Electron and Radiated Vortex Photon of Electromagnetic Wave: Vortex Electron Wave Packet

WANG Zhe-yuan, ZHANG Chao*

(Labs of Avionics, School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The theoretical model of cyclotron electrons to radiate vortex microwave photons is crucial for the technology of quantum state vortex electromagnetic wave. This paper is the first part of “The Vortex Electron and Vortex Microwave Photon”, which establishes the theoretical model related to the “Vortex Electron Wave Packet”. To be specific, the radiation of energy level transition is one of the natural radiations of a vortex electron. Aiming to analyze the principle of OAM vortex microwave photons generated by single vortex electron cyclotron radiation, this paper derives the vortex electron wave function according to the conserved quantity of electrons in a constant magnetic field and analyzes the motion of the relativistic electron wave packet. This paper then explains the case where the spin angular momentum and orbital angular momentum are inseparable by solving the Dirac equation. In addition, the Landau levels of the transverse energy distribution of the cyclotron in the magnetic field are obtained in the solution process according to the relativistic energy eigenequation. Finally, This paper simulates the shape of the Landau energy level when the electron has the exact mode of the orbital angular momentum.

Key words: energy level transition radiation; vortex electron; vortex photon of electromagnetic wave; orbital angular momentum; Landau levels; relativity; canonical momentum

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.61731011)

1 引言

携带螺旋相位项 $e^{il\phi}$ 的电子或光子具有明确定义的 $l\hbar$ 轨道角动量 (Orbital Angular Momentum, OAM), 被称为涡旋电子^[1,2] 或涡旋光子^[3-5], 其中 l 被称为拓扑荷, 通常可认为是周期相位变化次数或 OAM 模态值, ϕ 是

方位角, \hbar 表示约化普朗克常数。涡旋光子在理论上可以实现无限多个 OAM 模态值的正交叠加, 在通信领域可用作复用技术, 其中微波频段的 OAM 传输技术被认为是第六代移动通信潜在关键技术之一^[6]。近几年, OAM 还被应用于构建新型雷达方案中^[7]。针对隐身目标, 利用涡旋电磁波的螺旋相位面和空间相位梯度, 可

以实现反结构隐身^[8]. 另外,携带 OAM 的涡旋光子还被应用于信息技术^[9,10]和成像技术^[11]等领域,有关红外光和紫外光频段 OAM 光子也正在探索之中^[12,13].

由于磁矩引起的塞曼效应,恒定磁场中做回旋运动的电子束会具有一系列的横向分立能量,这种能量的分立现象被朗道(Landau)首次提出^[14],并称为朗道能级. 单个涡旋电子在磁场中做回旋运动时,可在这样的能级中以一定概率跃迁,能量的减少或增加在物理上表现为对光子的自发辐射或吸收,跃迁过程中电子的内禀角动量数发生变化,其概率分布也会有所不同. 由于角动量守恒,整个过程也可看作涡旋电子和涡旋电磁波量子之间进行的 OAM 传递^[15],具有 OAM 的电磁波量子可由磁场中的电子发射和吸收. 通过这种物理特性,涡旋电子可以辐射特定模式值或特定频率的涡旋电磁波量子,并有望利用电子回旋加速器等装置来实现.

单个电子的运动中伴随着电磁波的辐射,这属于电荷的自然属性^[16]. 一般而言,这种辐射可分为两大类:一种辐射是由电荷的加速运动产生的,通常包括电荷的回旋辐射、能级跃迁辐射;还有一种与电荷在介质中的匀速或加速运动有关(电荷速度大于介质中的光速),通常包括切伦科夫辐射等. 单电子回旋运动中的回旋辐射理论提出于 1904 年^[17],已经有很多学术文献和著作提到关于回旋辐射的讨论^[18,19]. 然而,单电子回旋运动中的能级跃迁辐射包含着轨道角动量的传递,却仍然缺失相关讨论,利用单电子回旋辐射产生 OAM 电磁波理论仍不完善,整个回旋辐射过程仍不清晰,因此需要建立相应完整的理论模型. 考虑到篇幅限制,相关问题将分为“涡旋电子波包”“涡旋电磁波量子辐射”和“内禀和外部轨道角动量”三个部分进行详细描述与理论推导. 本文是“涡旋电子波包”部分,主要对电子波包数学模型做具体阐述,根据量子电动力学(Quantum Electrodynamics, QED)理论^[20]推导相对论电子波函数及其朗道能级,并对比了相对论与经典物理中的电子运动.

2 电子波包的守恒量

磁场中运动的电子由于具有磁矩,在外磁场中有能量交互,其守恒量与自由电子有所不同,这将直接导致电子哈密顿量的不同.

在电子运动过程中,其能量和动量满足相对论质能方程: $E^2 = p^2 c^2 + \mu^2 c^4$ ^[16,21]. 应注意这里的 p 为经典物理中满足能量守恒的机械动量,表示为 $p = \mu v$, μ 表示电子量, v 是电子宏观运动的速度, c 为光速. 磁场中满足动量和角动量守恒的是正则动量,非宏观机械动量. 物理形式上由于电子在磁场运动中会产生相应磁矩,与外磁场进行换能,使机械动量损失一定冲量 $|e|A$, e 是电子荷量, A 表示矢量势. 这表明机械动量随着磁场大

小的改变而发生变化,不是守恒量^[22]. 相反,正则动量在数学形式上表示为电子运动的拉格朗日量对速度的偏导,与机械动量关系为 $P = p + |e|A$,在损失冲量 $|e|A$ 后恰好守恒,且不随磁场大小改变. 另外从 QED 理论出发,正则动量算符可表示为^[20]

$$\hat{P} = -i\hbar\nabla \quad (1)$$

式(1)与时间无关,并且满足与哈密顿算符 $\hat{H} = (\hat{P} - |e|A)^2 / 2\mu$ 的对易关系: $[\hat{P}, \hat{H}] = 0$. 因此该力学量算符守恒,这与经典物理计算得到的结论一致^[14].

在非相对论状态下,电子的波函数仅仅是坐标部分与自旋部分的乘积,可以表示为 $\psi = R(r, \varphi) \cdot S$, 这里 $R(r, \varphi)$ 为电子关于坐标部分的波函数, $S = \pm 1/2$ 为电子自旋. 可以看出轨道角动量和自旋角动量(Spin Angular Momentum, SAM)部分并没有耦合,能够分别满足守恒. 然而在相对论情况下有所不同,二者的区别在于:非相对论情况下不考虑光速不变限制,忽略内在的尺缩效应,而相对论情况需要重点考虑上述情况. 相对论效应下的狄拉克哈密顿量为 $H = \alpha \cdot P + \beta\mu$, 其中 α 和 β 是由泡利矩阵 σ 和单位矩阵 I 组成的狄拉克矩阵,下一节将会详细说明. α 和 β 可以表示为

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (2)$$

此时轨道角动量算符和自旋角动量算符具有如下形式:

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{P}, \hat{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (3)$$

式(2)和式(3)表明,任一角动量都不能单独与相对论哈密顿量对易,即使电子处于自由空间仍是如此,只有总角动量 $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ 满足与哈密顿算符对易,并具有守恒属性,狄拉克方程的解才正好可以将两个角动量耦合,即 OAM 和 SAM 耦合.

3 相对论电子波函数及朗道能级

相对论电子波函数的平方表征电子的分布概率,并且对求解能级跃迁中的跃迁几率具有重要意义. 通常相对论电子的波动性由其定态波函数表征,考虑相对论效应中电子波包守恒量,可通过分离变量写为

$$\Psi = \psi(\rho) \cdot u_\gamma \cdot e^{-j\omega t} \quad (4)$$

其中, $\psi(\rho)$ 为电子径向波函数,可以通过电子能量本征方程求解; u_γ 为狄拉克四维矢,可利用狄拉克方程求解; ω 为物质波频率.

3.1 径向波函数

考虑理想情况下磁场中单电子的运动,首先给定其回旋运动的物理模型,如图 1 所示. 假设携带电荷量 e 的电子处于恒定磁场 B_z 中,在 xOy 平面内做回旋运动,并且具有 z 项的速度分量,电子在三维空间做回旋

前进运动. 假设此时电子的回旋频率为 ω_c , 宏观运动速度为 v , 且本文中设定光速与普朗克常数满足自然单位制 $c = \hbar = 1$. 电子波包的能量本征解一般从其哈密顿量出发, 为使哈密顿量具有旋转不变性, 应考虑矢量势处于对称规范下. 因此磁感应强度为 \mathbf{B} 的均匀磁场矢量势可由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 求解:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{r} \quad (5)$$

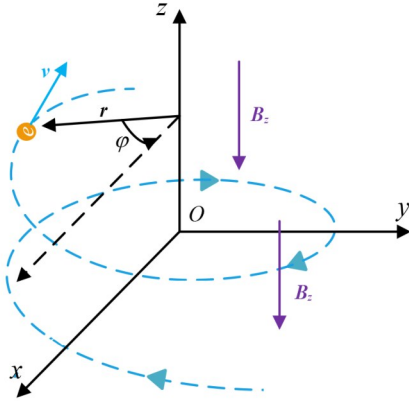


图1 恒定磁场中的涡旋电子

假设磁场取向为 z 向, 即 $\mathbf{B} = B_z$, 矢量势可由式(5)计算, 即

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{1}{2} B_y, \frac{1}{2} B_x, 0 \right) \quad (6)$$

根据相对论能量本征方程 $E^2 \psi = (p^2 + \mu^2) \psi$, 这里 E 为电子能级, 利用正则动量 $\hat{P} = \hat{p} + |e|A$ 对其做如下变型:

$$\frac{(E^2 - \mu^2)}{2\mu} \psi = \frac{(\hat{P} - |e|A)^2}{2\mu} \psi \quad (7)$$

令式(7)左侧的整个能量系数为 \mathcal{E} , 并考虑电子自旋磁矩带来的塞曼效应, 利用泡利矩阵的归一性 $(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + j(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ^[14] 改写式(7), 有

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \psi &= \frac{\left[(\hat{P} - |e|A) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \left[(\hat{P} - |e|A) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right]}{2\mu} \psi \\ &= \frac{1}{2\mu} \left[(\hat{P} - |e|A)^2 - j|e| \left[(\hat{P} \times A + A \times \hat{P}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \right] \psi \quad (8) \\ &= \left[\frac{1}{2\mu} (\hat{P} - |e|A)^2 - \frac{|e|\hbar}{2\mu} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \psi \end{aligned}$$

利用自旋和轨道量子化算符 $\mathbf{S} = (\hbar/2) \boldsymbol{\sigma}$ 和 $\hat{L}_z = x\hat{P}_y - y\hat{P}_x$, 将能量本征方程展开如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \psi &= \left[\frac{1}{2\mu} (\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2) + \frac{B^2 e^2}{8\mu} (x^2 + y^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{|e|B}{2\mu} (\hat{L}_z + 2\hat{S}_z) \right] \psi \quad (9) \end{aligned}$$

设 $\omega_L = \frac{1}{2} \omega_c = \frac{|e|B}{2\mu}$, 为拉莫尔频率, 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \psi &= \left[\frac{1}{2\mu} (\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2) + \frac{1}{2} \mu \omega_L^2 (x^2 + y^2) \right. \\ &\quad \left. - \omega_L (\hat{L}_z + 2\hat{S}_z) \right] \psi \quad (10) \end{aligned}$$

式(10)可在平面极坐标系下求解, 设径向波函数为

$$\psi(\rho) = R(\rho) e^{im\varphi} \cdot e^{ik_z z}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11)$$

螺旋相位因子 $e^{im\varphi}$ 项揭示了单电子 OAM 的明确特征. 由于电子的回旋运动在横向, 其 OAM 方向被定义沿 z 轴. 在此处做变量代换, 有

$$\xi = \frac{\mu \omega_L}{\hbar} \rho^2, (\xi \geq 0) \quad (12)$$

得到简化后的方程式如下:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{dR}{d\xi} - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2\xi} \left(\frac{\mathcal{E}}{\hbar \omega_L} \right. \right. \\ \left. \left. - m - 2s - \frac{\hbar k_z^2}{|e|B} \right) + \frac{m^2}{4\xi^2} \right] R = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

显然, 在 $\xi \rightarrow \infty$ 时 $R \rightarrow e^{-\xi/2}$, 在 $\xi \rightarrow 0$ 时 $R \rightarrow \xi^{|m|/2}$, 所以可设

$$R(\rho) = u(\xi) \xi^{|m|/2} e^{-\xi/2} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \xi \frac{d^2 u}{d\xi^2} + (|m| + 1 - \xi) \frac{du}{d\xi} \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}}{\hbar \omega_L} - m - |m| - 2s - 1 - \frac{\hbar k_z^2}{|e|B} \right) u = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

式(15)是合流超几何方程的一般式, 它有多项式解的条件是未知数一次项系数为自然数^[23], 即

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}}{\hbar \omega_L} - m - |m| - 2s - 1 - \frac{\hbar k_z^2}{|e|B} \right) = n_\rho \\ \left(n_\rho = 0, 1, 2, \dots; s = \pm \frac{1}{2} \right) \quad (16) \end{aligned}$$

利用 \mathcal{E} 和 ω_L 展开式(16), 可以得到电子在相对论状态下的朗道能级表达式, 该式也可称为能量与轴向波数色散方程, 即

$$E = \sqrt{k_z^2 + \mu^2 + B|e|(2n_\rho + m + |m| + 2s + 1)} \quad (17)$$

其中, k_z^2 表征运动方向的能量, 即电子沿磁场方向的动能; μ^2 表示相对论电子在磁场中的静止能量; $B|e|(2n_\rho + m + |m| + 1)$ 表示轨道磁矩与磁场相互作用能; $B|e| \cdot 2s$ 表示自旋磁矩与磁场的相互作用能. 在上述条件下, $u(\xi)$ 称为满足如下公式的缔合-拉盖尔(Laguerre)多项式^[23], 记为 $L_{n_\rho}^{|m|}(\xi)$, 即

$$\zeta \frac{d^2 L_{n_p}^{m|}}{d\zeta^2} + (m+1-\zeta) \frac{dL_{n_p}^{m|}}{d\zeta} + n_p L_{n_p}^{m|} = 0 \quad (18)$$

$$L_{n_p}^{m|}(\zeta) = \frac{e^{\zeta}}{n_p!} \frac{d^{n_p}}{d\zeta^{n_p}} \left(\zeta^{n_p+|m|} e^{-\zeta} \right) \quad (19)$$

总之,电子径向波函数可以写为式(19),且其自变量由前面 ζ 和 ρ 的关系式(12)定义为

$$\psi(\zeta) = e^{\zeta/2} e^{im\varphi} e^{jk \cdot r} \zeta^{|m|/2} L_{n_p}^{m|}(\zeta) \quad (20)$$

3.2 狄拉克四维矢量

通常解决相对论问题可以利用克莱因-戈尔登(Klein-Gordon)方程和狄拉克方程^[16,20,24]. 克莱因-戈尔登方程中存在时间二阶导数 $\partial^2/\partial t^2$,会引起电子在微观状态下的分布概率不正定. 而狄拉克方程的出发点即是解决波函数解的自洽问题,并能克服前者出现的负概率密度. 结合式(4)和式(20),电子波函数可以写为

$$\begin{aligned} \Psi &= \psi(\rho) \cdot u_\gamma \cdot e^{-j\omega t} \\ &= e^{im\varphi} e^{jk \cdot r} e^{-j\omega t} e^{\zeta/2} \zeta^{|m|/2} L_{n_p}^{m|}(\zeta) \cdot u_\gamma \end{aligned} \quad (21)$$

采用闵可夫斯基时空度规为(+, -, -, -),从狄拉克方程出发, $E\Psi = (j\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi$ ^[20], 利用狄拉克-伽马矩阵 γ^μ 将其展开,有

$$E\Psi = \left(\alpha_1 \left(\hat{P}_x - \frac{eB}{2} y \right) + \alpha_2 \left(\hat{P}_x - \frac{eB}{2} y \right) + \alpha_3 \hat{P}_z + \beta\mu \right) \Psi \quad (22)$$

其中狄拉克系数为

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

为方便计算,设 $Q = -j \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} - j \frac{eB}{2} x - \frac{eB}{2} y$, $Y = -j \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{eB}{2} x - \frac{eB}{2} y$, 与式(22)进行合并得

$$\begin{bmatrix} E-\mu & 0 & -j \frac{\partial}{\partial z} & -Q \\ 0 & E-\mu & -Y & j \frac{\partial}{\partial z} \\ -j \frac{\partial}{\partial z} & -Q & E+\mu & 0 \\ -Y & j \frac{\partial}{\partial z} & 0 & E+\mu \end{bmatrix} \Psi = 0 \quad (24)$$

解方程可以得到 u_γ 的两对线性独立解:

$$\begin{cases} u_1 = E + \mu \\ u_2 = 0 \\ u_3 = -j \frac{\partial}{\partial z} \\ u_4 = Y \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = E + \mu \\ u_3 = Q \\ u_4 = -j \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \quad (25)$$

根据QED理论,狄拉克方程四维矢的解应当对应电子的不同自旋^[20,21,24]. 将 u_γ 带入电子波函数中进行求解,并做变量代换: $r^2 = \zeta = \mu\omega_L \rho^2$, 则 $\tilde{x} = \sqrt{\mu\omega_L} x$, $\tilde{y} = \sqrt{\mu\omega_L} y$. u_γ 可由矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E + \mu \\ 0 \\ k_z \\ \sqrt{\mu\omega_L} \left(-j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + j\tilde{x} - \tilde{y} \right) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E + \mu \\ \sqrt{\mu\omega_L} \left(-j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} - j\tilde{x} - \tilde{y} \right) \\ k_z \end{bmatrix} \quad (27)$$

利用拉盖尔高斯多项式满足的递推关系^[23],结合第3.1节中电子的径向波函数解,可以得到磁场中相对论电子波函数为

$$\begin{aligned} \psi_+ &= e^{im\varphi} e^{jk_z z} e^{-jEt/\hbar} e^{-r^2/2} \begin{bmatrix} r^{|m|} L_{n_p}^{m|}(r^2) \\ 0 \\ k_z \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ j\sqrt{2} e^{j\varphi} r^{|m|+1} L_{n_p}^{|m|+1}(r^2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{|B|e|} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \psi_- &= e^{im\varphi} e^{jk_z z} e^{-jEt/\hbar} e^{-r^2/2} \begin{bmatrix} r^{|m|} L_{n_p}^{m|}(r^2) \\ E + \mu \\ 0 \\ -k_z \end{bmatrix} \\ &- j\sqrt{2} (m+n) e^{-j\varphi} r^{|m|-1} L_{n_p}^{|m|-1}(r^2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{|B|e|} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

波函数 ψ_+ 和 ψ_- 分别对应自旋本征值为 $S=+1/2$ 和 $S=-1/2$, 这表明自旋角动量和轨道角动量是直接耦合在波函数当中的, 而非携带两者信息的因子直接相乘. 这也说明相对论情况下任一角动量都无法守恒, 只有二者耦合后的总角动量守恒.

3.3 朗道能级

在微观物理中, 自由电子与外磁场的相互作用会导致电子束中出现一系列分立的横向能量, 而沿纵向 (通常磁场方向沿轴向) 却可以保持自由运动, 并具有准连续变化的动能, 这种离散的次能带正是朗道能级^[14]. 第 3.1 节的式 (17) 给出了相对论电子朗道能级的数学表达式, 电子横向离散能量的分布主要由两个量子数 n_ρ 和 m 体现. 同时, 量子数还决定电子的概率分布情况. 其中 n_ρ 为主量子数, 决定电子波函数的径向分布; m 为角量子数, 决定电子波函数的圆周向分布. 通过计算电子分布概率, 可以将朗道能级形状清晰地展示出来. 电子的概率密度可以计算为

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (30)$$

$$\rho = \psi^* \psi \quad (31)$$

通过带入波函数可以得到如图 2 所示的电子朗道能级分布, 主量子数 n_ρ 主要影响径向的能级个数, 角量子数 m 主要表现为波包的胀大或紧缩, 这也对应于朗道能级跃迁时电子波包的状态. 量子数改变对应的电子波包物质波相位变化如图 3 所示, 可以看到相位变化次数与角量子数一一对应.

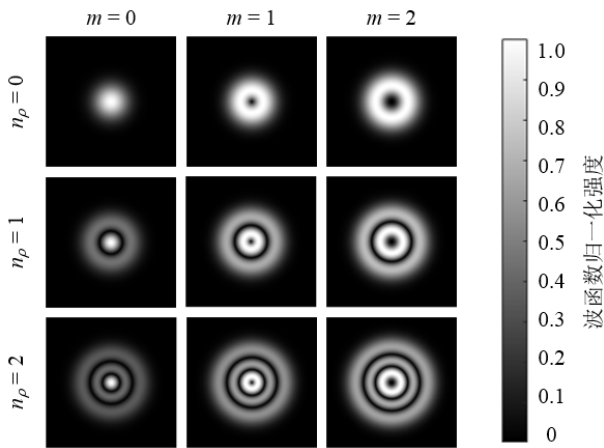


图 2 不同量子数对应的朗道能级分布

定义 $\gamma^0 = \beta$, $\gamma = \beta \alpha$, $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma)$, 根据连续性方程式 (30), 相对论电子的几率流密度可以表示为 $j_\mu = \Psi^\dagger \gamma^\mu \Psi$, 利用电子波函数式 (28) 和式 (29) 计算:

$$j_{\varphi+} = 2\sqrt{2} e^{-r^2} (E + \mu) r^{2|m|+1} L_{n_\rho}^{|m|}(r^2) L_{n_\rho}^{|m|+1}(r^2) \sqrt{|B|e|} \quad (32)$$

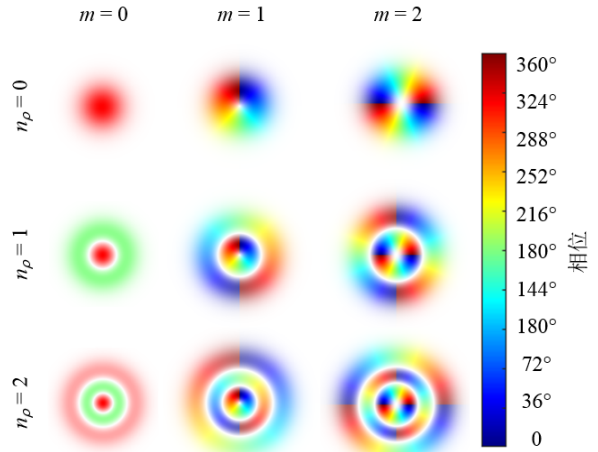


图 3 不同量子数对应的相位变化

$$j_{\varphi-} = 2\sqrt{2} e^{-r^2} (m + n_\rho) (E + \mu) r^{2|m|-1} \times L_{n_\rho}^{|m|}(r^2) L_{n_\rho}^{|m|-1}(r^2) \sqrt{|B|e|} \quad (33)$$

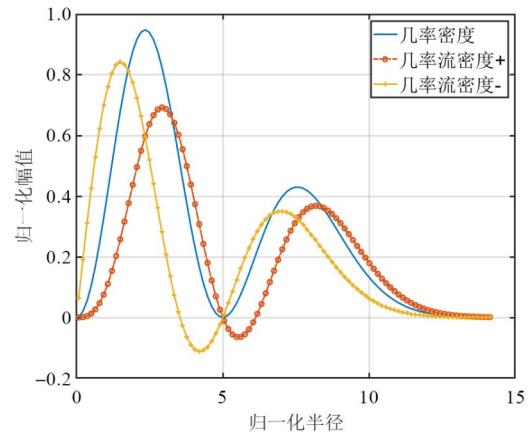


图 4 $m=1, n_\rho=1$ 对应的几率流密度和概率密度

几率流密度揭示了有关自旋的方位角电流分布, 如图 4 所示, 电流方向和电子自旋方向有关. 不同自旋的几率流密度总是分布在几率密度左右, 这也表明了相对论波函数中自旋密不可分的情况.

4 相对论电子波包群速

在实际情况中讨论的电子回旋运动, 电子并不能直接以“波函数”的形式来体现, 这是因为薛定谔方程或狄拉克方程描述的粒子都具有一定的质量和定域性, 意味着电子在回旋运动中具有不确定性的动量分布 $\hbar(k \pm \Delta k)$, 以“波函数”描述电子的回旋运动无法体现这一性质. 因此真正描述电子回旋运动的最小单位应当是满足波数 k 不确定性分布的“电子波包”, 在数学形式上表现为电子波函数的叠加态, 并且波包的群速对应于实际电子的运动速度. 以下进行相应分析.

首先建立自由电子或近似下布洛赫电子的宏观哈

密顿量与朗道能级对应关系^[25],在相对论情况下这种对应需要做些修改.在第3.1节中,由于相对论质能方程中出现了能量二次式,对电子径向波函数进行求解,有如式(7)的变型.相对论情况下与哈密顿量直接对应的是变换后的能量 E ,而非求解的相对论朗道能级 E .将哈密顿量表示为机械动量的波矢形式,即

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{k^2}{2m} = \frac{k_{n,\perp}^2}{2m} + \frac{k_z^2}{2m} \quad (34)$$

通过能量 \mathcal{E} 的变换,计算得到朗道能级与横向动量的对应关系为

$$k_{n,\perp}^2 = B|e|\left(2n_\rho + m + |m| + 2s + 1\right) \quad (35)$$

将横向分立能量代换,朗道能级式(17)可以表示为

$$E = \sqrt{c^2 \hbar^2 k_z^2 + \mu^2 c^4 + c^2 \hbar^2 k_{n,\perp}^2} = \sqrt{c^2 \hbar^2 k^2 + \mu^2 c^4} \quad (36)$$

假设实际电子具有的速度为 v ,满足经典的动量关系 $\hbar k = v\mu_0$.电子波包的群速显然恒等于其频率对波数的偏导^[21,24],即 $v_{\text{group}} = d\omega/dk$,在相对论情况中,有

$$v_{\text{group}} = \frac{\hbar k}{\sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{c^2} + \mu^2}} = \frac{v}{\sqrt{\frac{v^2}{c^2} + \mu^2}} \quad (37)$$

此时若代入根据狭义相对论因子 $\mu_0 = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ^[26],相对论群速将演变为非相对论情况,

得到波包群速和实际电子运动速度的等价结果,即

$$v_{\text{group}} = \frac{\hbar k}{\mu_0} = v \quad (38)$$

5 总结与讨论

本文根据电子波包的守恒量推导了在恒定外磁场中的相对论电子波包数学模型和朗道能级的具体表达式,该模型对分析回旋电子辐射过程中的能量变化和轨道角动量传递具有重要意义.这些理论模型不仅适用于分析磁场中的自由电子,也适用于某些势井中的电子.值得注意的是,非相对论涡旋电子波函数^[5]的求解通常仅仅依赖薛定谔方程,这将导致电子自旋角动量和轨道角动量守恒且独立,因为两者在哈密顿量中没有耦合,并且求得的电子波函数中仅通过两个携带有角动量信息的因子乘积即可体现.然而,不难发现这样的结论与电子回旋辐射中的角动量守恒矛盾^[1,15],例如非相对论电子在朗道能级中跃迁为 $m - m' = 1$ 时,由于只能辐射平面电磁波量子,设自旋角动量为1,则轨道角动量为0,这意味着两者存在耦合且无法满足各自独立.为了更好地解释这一现象,必须转而去求解更为复杂的狄拉克方程,因为自旋角动量直接构建在狄拉

克方程中,并且与轨道角动量之间内在耦合.

根据相对论电子波包模型,可以通过微扰求解电子波包在运动过程的能级跃迁和电磁波量子辐射问题,这将揭示量子态OAM电磁波的传输技术和探测技术,具体内容在本系列论文后续“涡旋电磁波量子辐射”部分进行详细推导.另外,由于电磁波光子的横向尺度是有限的,单个量子的OAM和波束的OAM应该加以区分,二者具有不同的数学分析模型和应用前景,也应当充分讨论.该内容在本系列论文后续“内禀与外部轨道角动量”部分进行推导与讨论.

参考文献

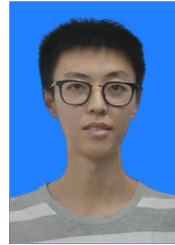
- [1] KATO H M, FUJIMOTO M, KAWAGUCHI H, et al. Angular momentum of twisted radiation from an electron in spiral motion[J]. *Physical Review Letters*, 2017, 118(9): 094801.
- [2] BLIOKH K Y, SCHATTSCHNEIDER P, VERBEECK J, et al. Electron vortex beams in a magnetic field: A new twist on Landau levels and Aharonov-Bohm states[J]. *Physical Review X*, 2012, 2(4): 041011.
- [3] MOLINA-TERRIZA G, TORRES J P, TORNER L. Twisted photons[J]. *Nature Physics*, 2007, 3(5): 305-310.
- [4] FRANKE-ARNOLD S, ALLEN L, PADGETT M. Advances in optical angular momentum[J]. *Laser & Photonics Reviews*, 2008, 2(4): 299-313.
- [5] BLIOKH K Y, BLIOKH Y P, SABEL'EV S, et al. Semi-classical dynamics of electron wave packet states with phase vortices[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99(19): 190404.
- [6] ZHANG Z Q, XIAO Y, MA Z, et al. 6G wireless networks: Vision, requirements, architecture, and key technologies[J]. *IEEE Vehicular Technology Magazine*, 2019, 14(3): 28-41.
- [7] IRIARTE GALARREGUI J C, TELLECHEA PEREDA A, DE FALCÓN J L M, et al. Broadband radar cross-section reduction using AMC technology[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2013, 61(12): 6136-6143.
- [8] ZHANG C, CHEN D, JIANG X F. RCS diversity of electromagnetic wave carrying orbital angular momentum[J]. *Scientific Reports*, 2017, 7: 15412.
- [9] NAGALI E, SCIARRINO F, DE MARTINI F, et al. Quantum information transfer from spin to orbital angular momentum of photons[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 103: 013601.
- [10] 郭忠义, 龚超凡, 刘洪郡, 等. OAM光通信技术研究进

- 展[J]. 光电工程, 2020, 47(3): 95-128.
- GUO Z Y, GONG C F, LIU H J, et al. Research advances of orbital angular momentum based optical communication technology[J]. Opto-Electronic Engineering, 2020, 47(3): 95-128. (in Chinese)
- [11] TORRES J P, TORNER L. Twisted Photons: Applications of Light With Orbital Angular Momentum[M]. Weinheim: Wiley-VCH, 2011.
- [12] SASAKI S, MCNULTY I. Proposal for generating brilliant X-ray beams carrying orbital angular momentum[J]. Physical Review Letters, 2008, 100(12): 124801.
- [13] UCHIDA M, TONOMURA A. Generation of electron beams carrying orbital angular momentum[J]. Nature, 2010, 464(7289): 737-739.
- [14] LANDAU L D, LIFSHITZ E M. Quantum mechanics: Non-relativistic theory[J]. The Mathematical Gazette, 1959, 43(346): 305-306.
- [15] ZHANG C, XU P F, JIANG X F. Vortex electron generated by microwave photon with orbital angular momentum in a magnetic field[J]. AIP Advances, 2020, 10(10): 105230.
- [16] LARMOR J, RS F, COLLEGE F. A dynamical theory of the electric and luminiferous medium—Part III. relations with material media[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, 1897, 190: 205-300.
- [17] HEAVISIDE O. The radiation from an electron describing a circular orbit[J]. Nature, 1904, 69(1787): 293-294.
- [18] TAKAKURA T. Theory of solar bursts[J]. Solar Physics, 1967, 1(3): 304-353.
- [19] SCHWINGER J. On the classical radiation of accelerated electrons[J]. Physical Review, 1949, 75(12): 1912-1925.
- [20] COHEN-TANNOUDJI C, DUPONT-ROC J, GRYNBERG G. Photons and atoms: Introduction to quantum electrodynamics[M]. New York: Wiley, 1989.
- [21] HEITLER W; H. The Quantum Theory of Radiation[M]. Oxford: Clarendon Press, 1954.
- [22] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- ZHOU Y B. Course of Theoretical Mechanics[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2009. (in Chinese)
- [23] BAYIN S. Laguerre Polynomials[M]. New York: John Wiley & Sons, 2018.
- [24] 阿希叶泽尔, 别列斯捷茨基. 量子电动力学[M]. 于敏, 译. 北京: 科学出版社, 1964.
- [25] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2008.

GUO S H. Electrodynamics[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2008. (in Chinese)

- [26] 弗伦奇. 狭义相对论[M]. 张大卫, 译. 北京: 人民教育出版社, 1979.

作者简介



王哲远 男, 1995年生, 山西临汾人. 清华大学航天航空学院在读博士生. 研究方向为电磁波轨道角动量传输与探测, 涡旋微波量子.



张超 男, 1978年生, 陕西城固人. 清华大学航天航空学院教授、博士生导师. 2005年获清华大学工学博士学位, 2006年获日本国家信息学研究所(NII)信息学博士学位. IET会士(IET Fellow)、IEEE高级会员、IEICE高级会员. 主要研究方向为涡旋电磁波轨道角动量传输与探测、涡旋微波量子、航空宇航电子系统.

E-mail: zhangchao@tsinghua.edu.cn